1. Halbebenen-Model der hyperbolischen Ebene

Jedes $g \in M$ erhält Doppelverhältnisse, wenn alle vier Punkte nicht nach ∞ geschickt werden. Seien nun A, B, C, D paarweise verschiedene Punkte in $\hat{E}$. Ist einer der Punkte ∞ so erstzen wir das Doppelverhältnis durch die Proportion der beiden "endlichen Abstände". Ist z.B. $A = \infty$, so setzen wir

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{BD}{CD}$$

.

Auch dieses erweiterte Doppelverhältnis wird von jedem Element $g \in M'$ erhalten. Denn jede Ähnlichkeit erhält ∞ und alle Proportionen. Wir müssen also nur überpr"ufen, dass jede Inversion dieses "erweiterte" Doppelverhältnis erhält. Dies zeigt man genau so, wie im vorherigen "endlichen" Fall.

Sei Γ ein Kreis in der Euklidischen Ebene E, sei H das Innere des Kreises Γ. Ist l eine Gerade in E so gibt es eine Möbius-Transformation $g \in M$, die Γ auf $\hat{l}$ abbildet. Dann muss $g(H)$ eine l-Halbebene sein. Zykel in E die Γ senkrecht schneiden werden auf Zykel abgebildet, die l senkrecht schneiden. Damit erhalten wir das Folgende Halbebenen-Model H' der hyperbolischen Ebene, das isometrisch zu H ist (mittels der Abbildung g):

Die Elemente von H' sind Punkte einer Euklidischen Halbebene bzgl. einer Geraden l. Die Geraden in H' sind Halbkreise, die l senkrecht in den Endpunkten schneiden und auf l senkrecht stehende Strahlen. Das Winkelmaß ist das Euklidische Winkelmaß zwischen den Bögen. Der Abstand zwischen zwei Punkten wird durch das Doppelverhältnis wie in H berechnet: Sind $P, Q \in H'$, so gibt es genau einen Zykel Z, der P, Q enthält und l senkrecht schneidet. Ist Z ein Kreis, so schneidet es l in A, B und der Abstand ist

$$ln \frac{AQ \cdot BP}{AP \cdot BQ}$$

Ist Z eine Gerade, so schneidet es l in einem Punkt A (der andere Punkt ist ∞) und der hyperbolische Abstand zwischen P, Q in H' ist

$$ln \frac{AQ}{AP}$$

Wieder sind die eigentlichen Isometrien von H' genau diejenigen Elemente $g \in M$, für die $g(H') = H'$ gilt.

2. Komplexe Koordinaten

Wir identifizieren E mit $\mathbb{R}^2$ und diese Koordinaten Ebene wie üblich mit $\mathbb{C}$.

SATZ 2.1. *Die Ähnlichkeiten $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind genau alle Abbildungen der Form $f(z) = a \cdot z + b$ oder $f(z) = a \cdot \bar{z} + b$, mit komplexen Zahlen a, b, wobei $a \neq 0$. Die Abbildungen erster Art sind genau die winkelerhaltenden Ähnlichkeiten.*

Beweis. Die Abbildungen $z \to z + b$ sind genau die Verschiebungen, die Abbildungen $z \to r \cdot z$ mit $0 < r \in \mathbb{R}$ sind genau die zentrischen Streckungen mit Zentrum in 0 und die Abbildungen $z \to e^{i\phi} \cdot z$ und $z \to e^{i\phi} \cdot \bar{z}$ sind genau die eigentlichen bzw. uneigentlichen Bewegungen, die 0 festhalten. □

Die Inversion I_Γ am Kreis mit Radius r und Zentrum $c \in \mathbb{C}$ hat die Form $I_\Gamma(z) = c + \frac{r^2 \cdot (z-c)}{|z-c|^2}$, für $z \neq c$. Die Konjugation $z \to \bar{z}$ ist die Spiegelung S an der y-Achse, und die Komposition $S \circ I_\Gamma$ hat folglich die Form $z \to \bar{c} + \frac{r^2}{z-c}$. Jetzt können wir zeigen:

SATZ 2.2. *Die Möbiustransformationen sind genau Abbildungen der Form $f_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit komplexen Zahlen a, b, c, d, die $ad - bc \neq 0$ erfüllen.*

Beweis. Die obige Abbildung sollte so verstanden werden, dass $f(\infty) = \frac{a}{c}$, wenn $c \neq 0$ und $f(\infty) = \infty$ sonst. Ferner setzen wir $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, wenn $c \neq 0$.

Die Abbildungen $f(z)$ in der obigen Form mit $c = 0$ sind genau alle winkelerhaltenden Ähnlichkeiten. Für $c \neq 0$ haben wir alle Abbildungen der Form

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{z + d_1} = a_1 + \frac{b_1 - a_1 d_1}{z + d_1}$$

.

Damit ist jede solche Abbildung die Komposition von Translationenn, Multiplikationen mit komplexen Zahlen und einer Abbildung der Form $S \circ I_\Gamma$ wie oben, also ist jedes solche f eine Möbiustransformation.

Andererseits ist jede Möbiustransformation eine Ähnlichkeit, oder die Komposition von einer Abbildung $S \circ I_\Gamma$ wie oben und einer eigentlichen Bewegung, hat also die obige Form. □

Einsetzen und nachrechnen ergibt:

SATZ 2.3. *Die Abbildung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to f_{a,b,c,d}$ ist ein Gruppenhomorophismus von $GL_2(\mathbb{C})$ nach M. Der Kern sind genau die Diagonalmatrizen.*

Ist H' die ober Halbebene, d.h., die Menge aller komplexen Zahlen $x + i \cdot y$ mit $y > 0$, so erfüllt $g \in M$ genau dann $g(H') = H'$, wenn es durch ein Element $f_{a,b,c,d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ repräsentiert werden kann.

3. Und wieder das Scheibenmodell

Wir können mit Hilfe der komplexen Zahlen den hyperbolischen Abstand in der Einheitskreisscheibe H zwischen zwei Punkten $z, z_0 \neq 0$ wie folgt ausdrücken. Ist Γ^∞ der Einheitskreis, so ist das Bild von z unter der Inversion an Γ^∞ der Punkt $z_1 = \overline{\frac{1}{z}}$. Der Radius r des Kreises Γ um z_1 ist $\sqrt{|z_1|^2 - 1}$. Das Bild z_2 von z_0 unter der Inversion an Γ ist $z_1 + \frac{r^2 \cdot (z_0 - z_1)}{|z_0 - z_1|^2}$.

Wenn wir z_1 und r durch z ausdrücken und den Ausdruck vereinfachen, sehen wir $z_2 = \frac{z}{\bar{z}} \cdot \frac{z_0 - z}{\bar{z}_0 z - 1}$. Hence

$$|z_2| = \frac{|z_0 - z|}{|\bar{z}_0 z - 1|}$$

. Und der hyperbolische Abstand von z_0 und z_1 ist

$$\log\left(\frac{1 + |z_2|}{1 - |z_2|}\right)$$